a,b,c sabit katsayılar olmak üzere $ay''+by'+cy=g(t)$ homojen olmayan dif. denklemler için belirsiz katsayılar yönteminde izlenecek yol;

1) Homojen kısmın çözümünü bulmak,
2) $g(t)$ fonksiyonunun eksponansiyel, sinus, kosinus, polinom veya bunların toplam ve çarpımından oluşmasına dikkat etmek,
3) Eğer $g(t)=g_1(t)+g_2(t)+\cdots+g_n(t)$ şeklinde ise önce denklemi

$$ay''+by'+cy=g_i(t) \qquad i=1,2,\ldots,n$$

alt problemlerine ayırmak,

4) i. alt problemin birinde eğer homojen çözümle çakışma varsa $Y_i(t)$'yi t veya gerektiğinde t^2 ile çarpıp çakışmayı kaldırmak,

5) alt problemleri çözmek,
6) Homojen ve özel çözümü toplayıp genel çözümü yazmak,
7) Genel çözümde, başlangıç koşullarını kullanarak sabitleri belirlemek.

Homojen olmayan kısımdaki $g(t)$ fonksiyonları için, yapılması gereken özel çözümlerin yapıları aşağıdaki tabloda olduğu gibidir.

$$ay''+by'+cy=g_i(t)$$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t)=a_0t^n+a_1t^{n-1}+\cdots+a_n$	$t^s\left(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n\right)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s\left(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n\right)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\begin{cases}\sin\beta t\\ \cos\beta t\end{cases}$	$t^s\left[\left(A_0t^n+A_1t^{n-1}+\cdots+A_n\right)e^{\alpha t}\cos\beta t + \left(B_0t^n+B_1t^{n-1}+\cdots+B_n\right)e^{\alpha t}\sin\beta t\right]$

Burada s homojen kısmın genel çözümüne göre 0,1,2, değerlerini alır.

Örnekler: 1) $y''-2y'+y=te^t+4$ $\quad y(0)=1$, $y'(0)=1$ başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

$$y''-2y'+y=0$$

$$r^2-2r+1=0 \Rightarrow (r-1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=1$$

$$y_h=c_1e^t+c_2te^t$$

$$y''-2y'+y=4 \qquad g_1(t)=4$$

$$Y_1(t)=A_0$$

$$Y_1'(t)=0=Y_1''(t)$$

$$Y_1(t)=4$$

$$y'' - 2y' + y = te^t \qquad g_2(t) = te^t$$

$$Y_2(t) = (A_0 t + B)e^t \quad \text{olmaz}$$

$$Y_2(t) = t(A_0 t + B)e^t \quad \text{olmaz}$$

$$Y_2(t) = t^2(A_0 t + B)e^t$$

$$Y_2'(t) = \left[A_0 t^3 + (3A_0 + B)t^2 + 2Bt\right]e^t$$

$$Y_2''(t) = \left[A_0 t^3 + (6A_0 + B)t^2 + (6A_0 + 4B)t + 2B\right]e^t$$

Denklemde yerine konursa

$$\left[A_0 t^3 + (6A_0 + B)t^2 + (6A_0 + 4B)t + 2B - 2A_0 t^3 - 2(3A_0 + B)t^2 - 4Bt + A_0 t^3 + Bt^2\right]e^t = te^t$$

$$(6A_0 t + 2B)e^t = te^t$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 6A_0 = 1 \\ B = 0 \end{array} \Rightarrow A_0 = \frac{1}{6}$$

$$Y_2(t) = \frac{t^3}{6}e^t$$

Genel çözüm

$$y = y_h + Y_1(t) + Y_2(t)$$

$$y = c_1 e^t + c_2 te^t + 4 + \frac{t^3}{6}e^t$$

$$\left(y' = c_1 e^t + c_2(t+1)e^t + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}\right)e^t\right)$$

$$t = 0,\ y = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + 4 \Rightarrow c_1 = -3$$

$$t = 0,\ y' = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 4$$

$$y = -3e^t + 4te^t + 4 + \frac{t^3}{6}e^t$$

2) Aşağıdaki şıklar için belirsiz katsayılar yönteminde kullanılacak $Y(t)$ formlarını saptayınız.

a) $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2 e^{-3t} + \sin 3t$

b) $y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t + e^{2t}(3t+4)\sin t$

a)

$$Y(t) = (A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4) + (B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-3t} + (C_0 \sin 3t + C_1 \cos 3t) \quad \text{olamaz}$$

$$y'' + 3y' = 0$$

$$r^2 + 3r = 0 \Rightarrow r_1 = 0,\ r_2 = -3$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-3t}$$

$$Y(t) = t(A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4) + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2)e^{-3t} + (C_0 \sin 3t + C_1 \cos 3t)$$

b) $Y(t) = (A_0 \cos 2t + A_1 \sin 2t)e^t + (B_0 t + B_1)\sin t\, e^{2t} + (C_0 t + C_1)\cos t\, e^{2t}$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow (r-2)(r-3) = 0 \Rightarrow r_1 = 2,\ r_2 = 3$$

$$y_h = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$

Özel çözüm yukardaki gibidir.

3.7 Sabitlerin Değişimi Yöntemi

Özel çözümü bulmanın diğer bir yöntemi sabitlerin değişimi yöntemidir. Bu yöntem, herhangi bir denkleme uygulanabildiğinden daha genel bir yöntemdir. (Bu yöntemde integralleri hesaplamak zor olabilir)

Örnek; $y'' + y = \tan t \quad 0 < t < \pi/2$ dif. denklemin bir özel çözümünü bulalım. $g(t) = \tan t$ olduğundan belirsiz katsayılar yöntemi ile bunu çözemeyiz. (Çünkü $\sin t$ veya $\cos t$'nin çarpımları şeklinde yazılamaz). Bu yüzden bu denklemi çözmek için farklı bir yaklaşıma ihtiyacımız vardır. Bu denklemin homojen kısmının çözümü

$$y_h = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

dir. Sabitlerin değişimi yönteminde temel fikir c_1, c_2 sabitlerinin yerine $u_1(t), u_2(t)$ fonksiyonlarını koyarak, bu fonksiyonları, homojen olmayan dif. denklemin bir çözümü olacak şekilde belirlemektir.

$$y = u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t$$

verilen dif. denklemin bir çözümü olacak şekilde u_1 ve u_2 fonksiyonlarını bulmak için y' ve y'' türevlerinden yararlanılacaktır. Bir denklem ve iki bilinmeyen olduğundan, denklemi sağlayacak birden çok u_1, u_2 fonksiyonları bulunabilir. Buna göre Lagrange'ın yaptığı gibi ikinci şartı uygun seçerek u_1, u_2'yi kolayca bulabiliriz.

$$y' = -u_1(t)\sin t + u_2(t)\cos t + u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t$$

ikinci şart için

$$u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t = 0 \qquad (3.15)$$

alırsak

$$y' = -u_1(t)\sin t + u_2(t)\cos t$$

olur.

$$y'' = -u_1(t)\cos t - u_2(t)\sin t - u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t$$

y' ve y'' denklemde yerine konursa

$$y'' + y = \tan t \Rightarrow -u_1(t)\cos t - u_2(t)\sin t - u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t + u_1(t)\cos t$$
$$+ u_2(t)\sin t = \tan t$$
$$\Rightarrow -u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = \tan t \qquad (3.16)$$

elde edilir.

Sonuçta (3.15) ve (3.16) şartlarını sağlayacak u_1 ve u_2 fonksiyonlarını bulmak istiyoruz.

$$u_1'(t)\cos t + u_2'(t)\sin t = 0$$
$$-u_1'(t)\sin t + u_2'(t)\cos t = \tan t$$

cebirsel lineer denklem sisteminden

$$u_1'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ \tan t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{-\sin t . \tan t}{1} = -\frac{\sin^2 t}{\cos t}$$

$$u_2'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & \tan t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{\cos t . \tan t}{1} = \sin t$$

bulunur. İntegraller alınarak u_1 ve u_2,

$$u_1(t) = \sin t + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin t}{1-\cos t} + c_1 \;, \quad u_2(t) = -\cos t + c_2$$

bulunur. Sonuçta çözüm

$$y = \left(\sin t + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sin t}{1-\cos t} + c_1\right)\cos t + \left(-\cos t + c_2\right)\sin t$$
$$= -\cos t \ln\left(\tan t + \sec t\right) + c_1\cos t + c_2\sin t \qquad (3.17)$$

olarak bulunur.

Özel çözüm $Y(t) = -\cos t \ln\left(\tan t + \sec t\right)$ ve genel çözüm (3.17) dir.